Die Einführung eines logischen Bedeutungsbegriffs

B. Bucephalus

Mai 1997

Zusammenfassung

Die traditionelle Semantik beruht auf der Annahme zweier ontologischer Ebenen — einer *Welt* und einer *Sprache* — und begreift semantische Erscheinungen als wechselseitige Abbildungen zwischen den Phänomenen der Welt und den Ausdrücken der Sprache: Einerseits drücken Ausdrücke Phänomene aus, andererseits sind Phänomene die Bedeutungen der Ausdrücke.

Die hier verfolgte Semantik ist dagegen grundsätzlich anders. Sie geht davon aus, daß sich im Rahmen der Semiotik Welt und Sprache gar nicht trennen lassen. Es gibt lediglich eine einzige ontologische Kategorie, nämlich ein System von Zeichen (genannt *Assertionen*). Semantische Beziehungen existieren nur als Beziehungen zwischen den Zeichen eines gegebenen Systems. *Grundprinzip* ist also: die *Bedeutung* einer Assertion ist wiederum eine Assertion, und zwar des selben Systems. Semantische Beziehungen existieren nicht als Identitäten, hergestellt zwischen Welt und Sprache, sondern ausschließlich als Differenzen innerhalb eines Zeichengeflechts. Das *Oppositionsprinzip* fordert sogar noch mehr: Die Konstituenten (genannt *Bitvariablen*) der Bedeutung einer gegebenen Assertion sind genau die Konstituenten des Zeichensystems, die nicht die Konstituenten der Assertion sind.

Damit ist ein formaler Bedeutungsbegriff aber immer noch unterbestimmt und weitere Postulate werden vorgeschlagen, insbesondere das *Verifikationsprinzip*: Die Bedeutung einer gegebenen Assertion ist ein (möglichst allgemeiner) Fall, für den die Assertion wahr ist. Damit nun läßt sich tatsächlich schon eine *Bedeutungsfunktion* definieren. Diese besitzt sogar die mächtige Eigenschaft, daß sich der traditionelle Wahrheitsbegriff der formalen Logik vollständig in den neu gewonnenen Bedeutungsbegriff aufheben läßt, so daß Wahrheit nur noch als Grenzfall der Bedeutung erscheint.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe

1.1 Bitvariablen und Bitwerte

Die elementarsten Einheiten unserer Logik sind die sogenannten binären Variablen, oder kurz: die BITVARIABLEN[1]. Eine Bitvariable dient uns dazu, eine Ja/Nein-Entscheidung zu treffen. Das ist alles.

Wir drücken das durch folgende Bezeichnungen aus:

— Eine Bitvariable A kann genau einen von zwei Werten annehmen: entweder 1 oder 0.

— $A = 1$ bedeutet soviel wie "A trifft zu" oder "A ist der Fall". Wir schreiben meist kürzer wiederum nur A statt $A = 1$.

— $A = 0$ läßt sich paraphrasieren durch "A trifft nicht zu" oder "A ist nicht der Fall". Dies schreiben wir meist kürzer als $\overline{A}$ oder $\neg A$.

— 0 und 1 sind die sogenannten BITWERTE.

In einem Standard-Beispiel, das wir im folgenden immer wieder diskutieren werden, kommen die vier Bitvariablen H, R, S, W vor. Der Anschauung halber seien sie wie folgt gedeutet:

— H steht für "es ist heiß" oder "das Wetter ist warm".

— R steht für "es regnet".

— S steht für "es schneit".

— W steht für "es ist feucht (wet)" oder "es gibt Niederschlag".

Dementsprechend steht

— $\overline{H}$ oder $\neg H$ für "es ist nicht heiß" oder "das Wetter ist nicht warm".

— $\overline{R}$ oder $\neg R$ für "es regnet nicht".

— $\overline{S}$ oder $\neg S$ für "es schneit nicht".

— $\overline{W}$ oder $\neg W$ für "es ist nicht feucht" oder "es gibt keinen Niederschlag".

Durch eine Menge von Bitvariablen wird eine (aussagenlogische) Welt konstitu-

[1] Meist ist nicht von Bitvariablen, sondern von AUSSAGENVARIABLEN die Rede. Aber diese Bezeichnung wollen wir hier vermeiden aus Gründen, die weiter unten deutlich werden.

iert. Sie bilden sozusagen die ATOME dieser Welt. Je mehr Atome eine solche Welt besitzt, desto potentiell vielfältiger ist sie.

Die Bezeichnung Atom darf aber nicht allzu physikalisch interpretiert werden, denn es handelt sich bei ihnen um potentielle Entscheidungen, um einfache Prädikate, nicht um materielle Einheiten. Wittgenstein umschreibt das im *Tractatus logico-philosophicus* durch den Satz 1.1:

> *Die Welt ist die Gesamtheit der Tatsachen, nicht der Dinge.*[2]

1.2 Bewertungen

In einer Welt, die aus n Bitvariablen besteht, gibt es 2^n verschiedene Zustände, je nach dem Bitwert, die die Bitvariablen annehmen.

Zustände der vierelementigen Beispielmenge $\{H, R, S, W\}$ sind etwa

— $\overline{HR}SW$ für "es ist nicht heiß, es regnet nicht, es schneit und es ist feucht" oder

— $HR\overline{S}W$ für "es ist heiß, es regnet, es schneit nicht und es ist feucht".

Insgesamt erzeugt die Bitvariablen-Menge $\{H, R, S, W\}$ eine Welt aus $2^4 = 16$ verschiedenen Zuständen, nämlich:

$$\begin{array}{llll}
\overline{HRSW} & H\overline{RSW} & \overline{H}R\overline{SW} & HR\overline{SW} \\
\overline{HR}S\overline{W} & H\overline{R}S\overline{W} & \overline{H}RS\overline{W} & HRS\overline{W} \\
\overline{HRS}W & H\overline{RS}W & \overline{H}R\overline{S}W & HR\overline{S}W \\
\overline{HR}SW & H\overline{R}SW & \overline{H}RSW & HRSW
\end{array}$$

Statt von Zuständen sprechen wir aber von BEWERTUNGEN der Bitvariablenmenge. Denn ein Zustand ist ja nichts anderes als eine Zuordnung jeweils eines Bitwertes zu jeder der gegebenen Bitvariablen.

1.3 Theorien

Um eine Welt vollständig zu beschreiben, reicht die Angabe der Atome und Zustände nicht aus. Es sind nun noch die möglichen von den unmöglichen Zuständen zu trennen.

Beispielsweise könnten wir mit Berufung auf unsere Lebenserfahrung von der hier betrachteten Welt erwarten, daß ein Zustand wie

> $HRS\overline{W}$ für "es ist heiß, es regnet, schneit und es ist nicht feucht"

unmöglich ist, während der Zustand

> $H\overline{RSW}$ für "es ist heiß, es regnet nicht, schneit nicht und es ist nicht feucht"

durchaus möglich ist.

[2] Für die traditionelle Logik haben Bitvariable den Status von (elementaren) Aussagesätzen (dementsprechend Wittgensteins TATSACHEN-Begriff.) Doch möchten wir den Leser dazu motivieren, Bitvariablen nicht nur durch Aussagesätze ("es ist heiß", "es regnet" und so weiter), sondern auch einmal durch Substantive ("Hitze", "Regen" und so weiter) oder Verben ("wärmen", "regnen" und so weiter) zu paraphrasieren.

Da wir im logischen Fachjargon nicht von Zuständen, sondern von Bewertungen sprechen wollen, so sagen wir auch

— Nullbewertung für einen unmöglichen Zustand einer Welt und
— Einsbewertung für einen möglichen Zustand einer Welt.

Außerdem sprechen wir korrekt von einer (aussagenlogischen) Theorie statt von einer Welt.

Eine Theorie ist also vollständig definiert durch

— eine Menge von n Bitvariablen,
— die Menge aller 2^n Bewertungen, die sich aus den Bitvariablen ergeben und
— eine Trennung der Menge aller Bewertungen in
  — eine Menge von Nullbewertungen und
  — eine Menge von Einsbewertungen.

Unsere Beispiel-Theorie sei demnach wie folgt definiert:

— die 4 Bitvariablen der Theorie sind

$$H, R, S, W$$

— die daraus resultierenden $2^4 = 16$ verschiedenen Bewertungen sind

$$\begin{array}{llll}
\overline{H}\,\overline{R}\,\overline{S}\,\overline{W} & H\overline{R}\,\overline{S}\,\overline{W} & \overline{H}R\overline{S}\,\overline{W} & HR\overline{S}\,\overline{W} \\
\overline{H}\,\overline{R}S\overline{W} & H\overline{R}S\overline{W} & \overline{H}RS\overline{W} & HRS\overline{W} \\
\overline{H}\,\overline{R}\,\overline{S}W & H\overline{R}\,\overline{S}W & \overline{H}R\overline{S}W & HR\overline{S}W \\
\overline{H}\,\overline{R}SW & H\overline{R}SW & \overline{H}RSW & HRSW
\end{array}$$

— von diesen Bewertungen sind
  — 12 Nullbewertungen

$$\begin{array}{llll}
\overline{H}R\overline{S}\,\overline{W} & HR\overline{S}\,\overline{W} & \overline{H}\,\overline{R}S\overline{W} & H\overline{R}S\overline{W} \\
\overline{H}RS\overline{W} & HRS\overline{W} & \overline{H}\,\overline{R}\,\overline{S}W & H\overline{R}\,\overline{S}W \\
\overline{H}R\overline{S}W & H\overline{R}SW & \overline{H}RSW & HRSW
\end{array}$$

  — und die restlichen 4 Bewertungen sind die Einsbewertungen

$$\begin{array}{llll}
\overline{H}\,\overline{R}\,\overline{S}\,\overline{W} & H\overline{R}\,\overline{S}\,\overline{W} & HR\overline{S}W & \overline{H}\,\overline{R}SW
\end{array}$$

Wenn wir die folgenden Abkürzungen benutzen

— Θ für eine Menge von Bitvariablen,
— $Val\Theta$ für die Menge aller Bewertungen, die sich aus diesen Bitvariablen ergeben, und
— Ω_0 und Ω_1 für die Menge aller Null- beziehungsweise Einsbewertungen,

so hat eine Theorie also formal die folgende Gestalt:

$$(\Theta, Val\Theta, \Omega_0, \Omega_1)$$

Allerdings wäre diese Schreibweise viel zu umständlich.

Zunächst einmal können wir wahlweise entweder Ω_0 oder Ω_1 fortlassen, denn wenn die eine Menge gegeben ist, ist die andere auch vollständig bestimmt. Also können wir statt $(\Theta, Val\Theta, \Omega_0, \Omega_1)$ kürzer schreiben $(\Theta, Val\Theta, \Omega_0)$ oder $(\Theta, Val\Theta, \Omega_1)$.

Außerdem ist die Menge $Val\Theta$ auch bereits vollständig durch die Angabe von Θ bestimmt, so daß wir die Schreibweise für die Theorie weiter abkürzen können zu (Θ, Ω_0) oder (Θ, Ω_1).

Doch auch diese Schreibweise ist im allgemeinen noch sehr unpraktisch, da die

Mengen Ω_0 und Ω_1, anders als in unserem kleinen Beispiel, im allgemeinen aus sehr vielen, sehr langen Bewertungen besteht, die alle aufzuzählen sehr mühsam und unübersichtlich wäre.
Deshalb benutzen wir, wie allgemein üblich, eine effizientere Notation, mit der sich eine Menge $Val\Theta$ von Bewertungen beliebig in zwei disjunkte Teilmengen Ω_0 und Ω_1 zerlegen läßt, nämlich eine Formel θ.
Mit so einer Formel ist eine Theorie dann formal definiert durch den Ausdruck (Θ, θ). Das ist die allgemein übliche Notation und im Prinzip wollen wir sie auch übernehmen, allerdings ein wenig modifiziert. Wir schreiben

$[\theta, \Theta]$

statt (Θ, θ) für eine Theorie.
Und wenn die Menge aller in θ vorkommenden Bitvariablen genau die Menge Θ ist, dann erlauben wir auch noch die Fortlassung von Θ und schreiben

$[\theta]$

für die selbe Theorie.
Es läßt sich übrigends leicht zeigen, daß zu jeder Darstellung $[\theta, \Theta]$ einer Theorie mit einer endlichen Menge Θ von Bitvariablen eine Formel θ' existiert, so daß $[\theta, \Theta] = [\theta']$. Welche der beiden Notationen wir gerade benutzen, ist also gleichgültig.
Doch zunächst einmal müssen wir noch definieren, was wir überhaupt unter einer Formel verstehen.

1.4 Formeln

Sei Θ eine Menge von Bitvariablen, so definieren wir die Menge $Form\Theta$ der aus Θ konstruierbaren FORMELN wie folgt:

— Jede der Bitvariablen und Bitwerte ist eine Formel und
— die aus bereits gegebenen Formeln mittels der JUNKTOREN
  $\neg$ für “nicht ...”,
  $\vee$ für “... und ...”,
  $\wedge$ für “... oder ...”,
  $\rightarrow$ für “wenn ..., dann ...” und
  $\leftrightarrow$ für “... genau dann, wenn ...”
  konstruierten Ausdrücke sind wiederum Formeln.

Beispiele für aus $\{H, R, S, W\}$ konstruierten Formeln wären

— R etwa für “Es regnet.”
— 0 etwa für “Das ist unmöglich.”
— 1 etwa für “Das ist immer so.”
— $(R \rightarrow 0)$ etwa für “Wenn es regnet, ist das unmöglich.” Mit anderen Worten: “Es regnet nicht (niemals).”
— $\neg(R \wedge S)$ etwa für “Es kann nicht (gleichzeitig) regnen und schneien.”
— $W \leftrightarrow (R \vee S)$ etwa für “Es ist feucht genau dann, wenn es regnet oder schneit.”
— $R \rightarrow H$ etwa für “Wenn es regnet, dann ist es heiß.”

— $S \to \neg H$ etwa für "Wenn es schneit, dann ist es nicht heiß."

Der Prozeß der Erzeugung neuer Formeln aus bereits gegebenen ist beliebig fortsetzbar. So lassen sich die vier zuletzt genannten Beispiele durch den Junktor " ... und ..." verbinden zu der Formel[3]

$$\neg(R \wedge S) \wedge (W \leftrightarrow (R \vee S)) \wedge (R \to H) \wedge (S \to \neg H)$$

Es gibt also unendlich viele Formeln, die sich aus einer beliebigen gegebenen Menge von Bitvariablen erzeugen lassen.

Wir hatten gesagt, eine Formel θ aus $Form\Theta$ trenne die Menge $Val\Theta$ aller Bewertungen in die Mengen der Null- und Einsbewertungen. Beispielsweise fordert

— $R \wedge S$, daß in jeder Einsbewertung sowohl R als auch S vorkommen muß (also weder $\overline{R}$ noch $\overline{S}$ vorkommen dürfen). Somit hätte die Theorie $[R \wedge S, \{H, R, S, W\}]$ genau die folgenden vier Einsbewertungen:

$$\overline{H}RS\overline{W} \quad HRS\overline{W} \quad \overline{H}RSW \quad HRSW$$

— $\neg(R \wedge S)$ würde hingegen fordern, daß in keiner Einsbewertung sowohl R als auch S vorkommen dürfte. Somit hätte die Theorie $[\neg(R \wedge S), \{H, R, S, W\}]$ genau die von den obigen vier verschiedenen zwölf Einsbewertungen.

— $S \to \neg H$ fordert von jeder Einsbewertung, daß wenn S darin vorkommt, auch $\overline{H}$ darin vorkommen muß. Mit anderen Worten: Nullbewertungen sind genau all die Bewertungen, in denen sowohl S als auch H vorkommt.

— $W \leftrightarrow (R \vee S)$ fordert von jeder Einsbewertung, daß dort nur genau dann W darin vorkommt, wenn dort auch R oder S vorkommt. Somit hätte die Theorie $[W \leftrightarrow (R \vee S), \{H, R, S, W\}]$ genau die folgenden acht Einsbewertungen:

$$\overline{H}\overline{R}\overline{S}\overline{W} \quad H\overline{R}\overline{S}\overline{W} \quad \overline{H}R\overline{S}W \quad HR\overline{S}W$$
$$\overline{H}\overline{R}SW \quad H\overline{R}SW \quad \overline{H}RSW \quad HRSW$$

Unser Standardbeispiel einer Theorie mit den Bitvariablen $\{H, R, S, W\}$ und den vier Einsbewertungen $\overline{H}\overline{R}\overline{S}\overline{W}$, $H\overline{R}\overline{S}\overline{W}$, $HR\overline{S}W$, $\overline{H}\overline{R}SW$ läßt sich formalisieren als

$$[\theta_w, \Theta_w]$$

wobei

$$\theta_w = \neg(R \wedge S) \wedge (W \leftrightarrow (R \vee S)) \wedge (R \to H) \wedge (S \to \neg H)$$
$$\Theta_w = \{H, R, S, W\}$$

sind (und der Index "w" durch die Bezeichnung "Wetter"-Theorie motiviert ist). Da außerdem Θ_w genau die Menge der in θ_w vorkommenden Bitvariablen ist, läßt sich die Theorie $[\theta_w, \Theta_w]$ auch schreiben als $[\theta_w]$.

Gegeben eine endliche Menge von n Bitvariablen.

— Dann lassen sich aus dieser Menge endlich viele Bewertungen konstruieren. (Nämlich 2^n verschiedene.)

— Die Menge aller Formeln, die sich daraus bilden lassen ist unendlich, aber

— die Menge aller Theorien, die sich aus all diesen Formeln konstruieren lassen, ist wiederum nur endlich. (Nämlich es gibt 2^{2^n} verschiedene.)

Viele Formeln beschreiben nämlich jeweils die selbe Theorie. So ist beispielsweise

[3] Einige überflüssige Klammern sind gleich fortgelassen, es gelten die üblichen Klammerungs- und Abkürzungskonventionen.

$[\neg(R \wedge S)]$
$= [\neg R \vee \neg S]$
$= [(\neg R \wedge \neg S) \vee (R \wedge \neg S) \vee (\neg R \wedge S)]$
$= [R \to \neg S]$

Es gibt sogar jeweils unendlich viele Formeln, die die selbe Theorie beschreiben. Zwei solcher Formeln heißen dann jeweils ÄQUIVALENT.[4]

1.5 Aussagen (Assertionen)

Wir wollen nun versuchen, den Begriff der Aussage (Assertion) zu entwickeln. Dabei wollen wir uns von dem, meist nach Aristoteles benannten Prinzip leiten lassen, das besagt:

Eine Aussage ist ein Ausdruck, der entweder wahr oder falsch ist.

Wir nennen WAHR und FALSCH die WAHRHEITSWERTE.

Um Aussagen zu definieren müssen wir also
— erstens definieren, welcher Art Ausdruck gemeint ist, und
— zweitens definieren, wie diesem Ausdruck ein Wahrheitswert zugeordnet wird.

1.5.1 Die Definition der Aussage als Formel

Häufig wird der Begriff der Aussage mit dem der Formel gleichgesetzt. Damit muß also jede Formel jeweils entweder wahr oder falsch sein. Doch wonach entscheidet sich, ob beispielsweise die Formel $\neg(R \wedge S)$ wahr oder falsch ist?

Wenn wir uns die Formel $\neg(R \wedge S)$ als Theorie $[\neg(R \wedge S)]$ vorstellen, so gibt es in dieser Theorie sowohl Nullbewertungen (nämlich RS) als auch Einsbewertungen (nämlich $\overline{RS}$, $R\overline{S}$, $\overline{R}S$). Aber daß wir sagen, die Aussage $\neg(R \wedge S)$ wäre somit bedingt falsch und bedingt wahr, ist nach dem aristotelischen Prinzip ausgeschlossen, denn das fordert eine eindeutige Entscheidung.

Der Versuch, Aussagen als Formeln zu definieren, ließe sich aber etwa dadurch retten, daß wir festlegen:
— eine Formel φ heiße wahr, wenn φ eine TAUTOLOGIE ist, mit anderen Worten,
— wenn in der Theorie $[\varphi]$ alle Bewertungen Einsbewertungen sind.

---

[4] Frege drückte das Phänomen der äquivalenten Formeln wie folgt aus:

Die Formeln sind zwar als geschriebene Formeln verschieden, aber ihr SINN, *ihr* GEDANKE *ist gleich.*

(Wobei er allerdings wörtlich nicht von Formeln, sondern von SÄTZEN sprach.)

Das, was Frege den Sinn einer Formel nannte, nennen wir die PROPOSITION. Wir schreiben $\langle\theta\rangle$ für die Proposition einer Formel θ und definieren sie als die Äquivalenzklasse aller zu θ äquivalenten Formeln.

Für das Verständnis unserer hier entwickelten (Aussagen-) Logik ist es von zentraler Bedeutung, den Unterschied zwischen einer Proposition $\langle\theta\rangle$ und einer Theorie $[\theta]$ ganz klar herauszuarbeiten. Ein Unterschied, den Frege (insbesondere wegen seiner platonischen, transzendentalen Konzeption von Logik) nicht wahrgenommen hat.

Demnach wäre $\neg(R \wedge S)$ eine falsche Formel, beziehungsweise eine falsche Aussage, während tautologische Formeln wie $R \vee \neg R$ und $R \to (R \vee S)$ wahre Aussagen darstellen.

Der Begriff der Aussage laßt sich also zwar mit dem der Formel gleichsetzen, aber diese Definition wäre nicht sehr praktisch. Wir machen deshalb einen anderen Vorschlag.

1.5.2 Die Definition der Aussage als Theorien-Paar

Statt einer Formel einen absoluten Wahrheitswert zuzuordnen, werden wir den Wahrheitsbegriff relativieren und sagen:

> Eine Formel ist in Hinsicht auf eine Theorie wahr oder falsch.

Die Formel $\neg(R \wedge S)$ wäre beispielsweise in Bezug auf unsere Standardtheorie $[\theta_w]$ wahr, denn in dieser Welt ist ein Zustand, in dem es gleichzeitig regnet und schneit, unmöglich und $\neg(R \wedge S)$ also in jedem Fall wahr. Andererseits lassen sich auch Theorien konstruieren, bezüglich derer die Formel $\neg(R \wedge S)$ falsch wäre. (Etwa, wenn S nicht mehr mit "es schneit", sondern mit "die Sonne scheint" assoziiert würde und die Theorie dementsprechend auf die naheliegende Weise verändert werden würde.)

Damit wäre eine Aussage also ein Paar $([\theta], \varphi)$, bestehend aus einer Theorie $[\theta]$ und einer Formel φ.

Es soll uns aber nicht auf die Formel φ, sondern nur auf das ankommen, was mit ihr ausgedrückt wird. Das heißt, wir wollen zwei Ausdrücke $([\theta], \varphi_1)$ und $([\theta], \varphi_2)$ als ein und die selbe Aussage definieren, wenn φ_1 und φ_2 äquivalent sind. Dies erreichen wir dadurch, daß wir eine Aussage nicht als ein Paar $([\theta], \varphi)$, sondern als ein Paar $([\theta], [\varphi])$ definieren. So sind nämlich zwei Aussagen $([\theta], [\varphi_1])$ und $([\theta], [\varphi_2])$ gleich, genau dann, wenn φ_1 und φ_2 äquivalent sind (und die selben Bitvariablen enthalten).[5]

Außerdem müssen wir noch die Einschränkung machen, daß in $[\varphi]$ nur Bitvariablen vorkommen dürfen, die auch in $[\theta]$ vorkommen.[6] Die endgültige Definition lautet also:

> Eine Assertion ist ein Paar von Theorien, wobei die zweite Theorie nur Bitvariablen enthalten darf, die auch in der ersten Theorie vorkommen.

Wir schreiben auch abkürzend

— $[\theta \mid \varphi]$ statt $([\theta], [\varphi])$,

[5] Bei dieser Argumentation wäre es naheliegender und hinreichend gewesen, eine Aussage nicht als ein Paar $([\theta], [\varphi])$ von Theorien zu definieren, sondern als ein Paar $([\theta], \langle\varphi\rangle)$, bestehend aus einer Theorie und einer Proposition. Das ist richtig, zumal dieser Unterschied in Hinsicht auf den Wahrheitsbegriff irrelevant ist. Für den Bedeutungsbegriff wird dieser Unterschied allerdings wesentlich. Das wird bei der Besprechung des sogenannten Oppositionsprinzips weiter unten deutlich werden.

[6] Andernfalls würde $[\varphi]$ "über Dinge (Bitvariable) reden", die in $[\theta]$ unbekannt sind, wodurch eine Entscheidung über die Wahrheit der Assertion unbestimmt wäre. (Jedenfalls im allgemeinen Fall, wenn eine der unbekannten Bitvariablen in $[\varphi]$ valent (s.u.) ist.) Falls diese Einschränkung aufgehoben ist, so sprechen wir von einer Mitteilung. Eine Assertion ist dann eine spezielle Mitteilung.

— $[\theta, \Theta \mid \varphi, \Phi]$ statt $([\theta, \Theta], [\varphi, \Phi])$

etc. für Assertionen.

1.5.3 Der Wahrheitswert einer Assertion

Nun fehlt uns noch ein Kriterium, um zu entscheiden, wann eine Assertion wahr und wann sie falsch ist.

Eine Assertion $[\theta \mid \varphi]$ ist WAHR, genau dann, wenn das, was durch φ ausgedrückt wird, auf alle Einsbewertungen von $[\theta]$ zutrifft. Andernfalls heißt die Assertion FALSCH.

Nehmen wir zur Veranschaulichung wieder unsere Standardtheorie

$$[\theta_w] = [\neg(R \wedge S) \wedge (W \leftrightarrow (R \vee S)) \wedge (R \rightarrow H) \wedge (S \rightarrow \neg H)]$$

Die vier Einsbewertungen von $[\theta_w]$ waren

$$\overline{H}\overline{R}\overline{S}\overline{W}, H\overline{R}\overline{S}\overline{W}, HR\overline{S}W, \overline{H}\overline{R}SW$$

Damit diskutieren wir die folgenden Beispiele für Assertionen.

— Sei φ_0 die Formel $R \vee \neg R$ für “Es regnet oder es regnet nicht”. In jeder der vier Einsbewertungen kommt entweder R oder $\overline{R}$ vor. Deshalb ist “Es regnet oder es regnet nicht” bezüglich der Standardtheorie wahr: $[\theta_w \mid \varphi_0]$ ist eine wahre Assertion.

— Sei φ_1 die Formel $\neg(R \wedge S)$ für “Es kann nicht (gleichzeitig) regnen und schneien”. In keiner der Einsbewertungen kommen gleichzeitig R und S vor. Somit trifft $\neg(R \wedge S)$ auf alle Einsbewertungen zu. Deshalb ist $[\theta_w \mid \varphi_1]$ eine wahre Assertion.

— Sei φ_2 die Formel R für “Es regnet”. Nun gibt es in $[\theta_w]$ eine Einsbewertung, nämlich $HR\overline{S}W$, auf die R zutrifft, aber auch drei Einsbewertungen $\overline{H}\overline{R}\overline{S}\overline{W}$, $H\overline{R}\overline{S}\overline{W}$ und $\overline{H}\overline{R}SW$, auf die nicht R, sondern $\overline{R}$ zutrifft. Also ist $[\theta_w \mid R]$ eine falsche Assertion.

— Sei φ_3 die Formel $R \rightarrow H$ für “Wenn es regnet, ist es heiß”. Das besagt: wenn in einer Einsbewertung R vorkommt, dann muß auch H dort vorkommen. (Und wenn dort $\overline{R}$ vorkommt, dann ist es gleich, ob dort H oder $\overline{H}$ steht.) Dies ist für alle vier Einsbewertungen der Fall: $[\theta_w \mid \varphi_3]$ ist eine wahre Aussage.

Im Beispiel φ_2 haben wir gesehen, daß “Es regnet” bezüglich unserer Theorie falsch ist, obwohl Regen in ihr ein durchaus möglicher Zustand ist. Eine Assertion $[\theta \mid \varphi]$ behauptet also nicht

“In der Theorie $[\theta]$ ist φ möglich.”

sondern vielmehr

“In der Theorie $[\theta]$ ist φ immer der Fall.”

Die gängige Bezeichnung dafür lautet

φ GILT IN $[\theta]$

oder auch

φ FOLGT AUS $[\theta]$,

was wir auch mit dem Folgerungssymbol $\Rightarrow$ schreiben als

$[\theta] \Rightarrow \varphi$

oder auch

$\theta \Rightarrow \varphi.$

Damit haben wir also

Eine Assertion $[\theta \mid \varphi]$ ist wahr genau dann, wenn $\theta \Rightarrow \varphi$.

1.5.4 Die Wahrheitsfunktion

Die Entscheidung, ob eine gegebene Assertion wahr oder falsch ist, ließe sich effizient und zuverlässig von einem Computer berechnen. Für dieses Problem stellt die traditionelle Aussagenlogik eine Vielzahl von Methoden bereit. Wir drücken das in funktionaler Schreibweise wie folgt aus, ohne hier im einzelnen auf eine der Methoden einzugehen.

Die Wahrheitsfunktion, die jeder Assertion $[\theta \mid \varphi]$ ihren Wahrheitswert

$$truth[\theta \mid \varphi] = \begin{cases} 1 & \text{falls } [\theta \mid \varphi] \text{ wahr ist und} \\ 0 & \text{falls } [\theta \mid \varphi] \text{ falsch ist.} \end{cases}$$

zuordnet, ist berechenbar.

Kapitel 2

Die Entwicklung eines Bedeutungsbegriffs

2.1 Das Grundprinzip

In der traditionellen Semantik ist Bedeutung eine Beziehung zwischen zwei disparaten ontologischen Sphären.[1] Typische Beispiele sind:

— Die Beziehung zwischen *Sprache* und *Welt*:
  — Das Substantiv "Schnee" bedeutet diesen weißen, kalten Stoff.
  — Das Verb "schneien" bedeutet den Niederschlag von Schneeflocken.
  — Der Satz "Es schneit" bedeutet die Tatsache daß es schneit.

— Die Beziehung zwischen *Sprache* und *Denken*,

— zwischen *gesprochener* und *geschriebener Sprache*,

— zwischen *einer* und *einer anderen (natürlichen) Sprache*,

— zwischen *Noten* und *Musik*.

Die Grundidee zur Entwicklung eines alternativen logischen Bedeutungsbegriffs besteht nun darin, die Existenz einer "Welt" jenseits der "Sprache" zu bezweifeln. Es gibt nur ein System von Zeichen. Und Bedeutung ist eine Beziehung zwischen je zwei Zeichen eines selben Systems.

Mit Hilfe der bisher formal eingeführten Begriffe und im Rahmen der hier entwickelten Aussagenlogik konstituiert sich ein Zeichensystem jeweils durch eine Theorie $[\theta]$, während die Zeichen dieser dann einmal gegebenen Sprache alle Assertionen der Form $[\theta \mid \varphi]$ sind.

Wir formulieren die Idee einer alternativen Semantik also durch das folgende Grundprinzip:

Für eine gegebene Theorie $[\theta]$ ist die Bedeutung einer Assertion $[\theta \mid \varphi]$

[1] Dadurch, daß die je zwei Kategorien jeweils mehr oder weniger als sogenannte Objekt- und Metasprache formalisiert werden, liegt die Idee und Möglichkeit der modernen Semantik als mathematisch-logische Wissenschaft begründet. (Manifestiert insbesondere in A.Tarski *Über den Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, 1935.)

eine Assertion $[\theta \mid \mu]$.

2.2 Die Bedeutungsfunktion

Das Grundprinzip geht ein in die funktionale Definition des Bedeutungsbegriffs durch die sogenannte Bedeutungsfunktion.

Die BEDEUTUNGSFUNKTION ordnet jeder Assertion $[\theta \mid \varphi]$ eine Theorie $[\mu]$ zu. Wir schreiben dies in der Form

$meaning[\theta \mid \varphi] = [\mu]$

und sagen

— $[\mu]$ ist die BEDEUTUNG von $[\theta \mid \varphi]$, oder auch

— $[\mu]$ ist die BEDEUTUNG VON $[\varphi]$ IN $[\theta]$.

Das Grundprinzip hatte nicht die Theorie $[\mu]$, sondern die Assertion $[\theta \mid \mu]$ als Bedeutung von $[\theta \mid \varphi]$ definiert. Doch da $[\theta]$ sich im Resultat ja nicht ändert, wird es in der Funktion der Kürze halber fortgelassen.

Es bleibt nun noch zu definieren, wie eine Bedeutungsfunktion die Theorie $[\mu]$ aus der Assertion $[\theta \mid \varphi]$ berechnet.[2]

2.3 Das nicht–diskriminierende Prinzip

Die Bedeutungsfunktion impliziert bereits das NICHT–DISKRIMINIERENDE PRINZIP unseres alternativen Bedeutungsbegriffs:

Jede Assertion hat eine Bedeutung.

Das soll auch nur noch einmal explizit ausgedrückt werden, weil einige Logiken, aufgrund innerer Zwänge ihrer Konzeption, ein Kriterium angeben müssen um sinnlose oder paradoxe Ausdrücke apriori aus der Menge aller Ausdrücke aussondern zu können, die dann im Kalkül verboten sind.

2.4 Das Lexikon

Aus dem Blickwinkel der traditionellen Semantik erscheint das Grundprinzip abwegig. Im Alltag gibt es aber durchaus Phänomene, bei denen der Bedeutungsbegriff genau im Sinne des Grundprinzips gebraucht wird. Ein typisches Beispiel ist das einsprachige Wörterbuch oder Lexikon.

Ein Lexikon ist, so ließe sich sagen, eine Liste von Definitionen möglichst aller zur Beschreibung einer Welt zur Verfügung gestellten Vokabeln oder Grundbegriffe.

[2] Es gibt natürlich wieder unendlich viele verschiedene Formeln μ, μ_1, μ_2, ... die die eine Theorie $[\mu] = [\mu_1] = [\mu_2] = ...$ repräsentieren würden und eine Bedeutungsfunktion muß, um wohldefiniert zu sein, eine herausgreifen. Es gibt viele praktische Möglichkeiten, aus unendlich vielen äquivalenten Formeln jeweils eine eindeutige, sogenannte KANONISCHE NORMALFORM auszuwählen, beispielsweise die sogenannte KANONISCHE DISJUNKTIVE NORMALFORM. Wir werden aber im folgenden gelegentlich eine gegebenenfalls intuitivere oder kürzere Form vorziehen.

Ein zeitgenössisches deutschsprachiges Lexikon beispielsweise ist eine Liste von Definitionen möglichst aller deutschen Vokabeln, die den deutsch Sprechenden zur Beschreibung ihrer gemeinsamen, sprachlich konstituierten Welt zur Verfügung steht.

Eine derartige Definition ist dabei ein Paar (D, δ), bestehend aus

— erstens, einer zu definierenden Vokabel D und
— zweitens, einem diese Vokabel definierenden Begriff oder Satz δ.

Dabei wird, damit die Definition nicht zirkulär ist, gefordert, daß die Vokabel D nicht in ihrer Erklärung δ auftauchen darf.

Gelesen wird eine solche Definition dann etwa als

— "“D” ist definiert durch δ" oder
— "“D” bedeutet δ".

Ein Lexikon für unsere kleine Welt des Standardbeispiels könnte etwa die folgenden Definitionen enthalten:

— “Regen” bedeutet Niederschlag bei warmem Wetter.
— “Schnee” bedeutet Niederschlag bei nicht warmem Wetter.
— “Niederschlag” bedeutet Regen oder Schnee.

2.5 Bedeuten als Definieren

Wir wollen versuchen, die Idee der Definition für eine genaue Bestimmung unseres Bedeutungsbegriffs nutzbar zu machen. Dazu müssen wir den Definitionsbegriff im Rahmen der Aussagenlogik formalisieren und machen den folgenden Ansatz:

Eine Definition in einer Theorie $[\theta]$ ist eine Formel $D \leftrightarrow \delta$, für die gilt:

— $D \leftrightarrow \delta$ gilt in $[\theta]$.
— D ist eine Bitvariable aus $[\theta]$ und δ enthält nur Bitvariablen aus $[\theta]$, die von D verschieden sind.

Wenn wir die genannten Beispiele in der Weise formalisieren, erhalten wir nun tatsächlich drei Definitionen, nämlich

— $R \leftrightarrow W \wedge H$
— $S \leftrightarrow W \wedge \neg H$
— $W \leftrightarrow R \vee S$

denn alle drei Formeln sind jeweils gültig in $[\theta]$.

Bisher ist aber eine Definition noch beschränkt auf Bitvariable D. Wir benötigen aber einen formalen Definitionsbegriff für alle Formeln φ, die aus den Bitvariablen aus $[\theta]$ konstruierbar sind. Deshalb erweitern wir die Definition der Definition auf naheliegende Weise:

Eine Definition in einer Theorie $[\theta]$ ist eine Formel $\varphi \leftrightarrow \mu$, für die gilt:

— $\varphi \leftrightarrow \mu$ gilt in $[\theta]$.
— φ und μ enthalten nur Bitvariablen aus $[\theta]$, aber keine einzige gemeinsame.

Falls $\varphi \leftrightarrow \mu$ eine Definition in einer Theorie $[\theta]$ ist, so sagen wir

— μ definiert φ in $[\theta]$ oder auch

— $[\mu]$ DEFINIERT $[\varphi]$ IN $[\theta]$ oder auch
— $[\mu]$ DEFINIERT $[\theta \mid \varphi]$.

Damit nun machen wir den folgenden Ansatz, um den Bedeutungsbegriff aus dem Definitionsbegriff heraus zu entwickeln:

Die Bedeutung einer Assertion $[\theta \mid \varphi]$ ist die Theorie $[\mu]$, für die gilt:
— $\varphi \leftrightarrow \mu$ gilt in $[\theta]$ und
— φ und μ enthalten nur Bitvariable aus $[\theta]$, aber keine gemeinsamen.

Für die genannten Beispiele erhalten wir
— $[W \wedge H]$ ist die Bedeutung von $[R]$ in $[\theta_w]$.
— $[W \wedge \neg H]$ ist die Bedeutung von $[S]$ in $[\theta_w]$.
— $[R \vee S]$ ist die Bedeutung von $[W]$ in $[\theta_w]$.

Doch tatsächlich muß dieser erste Versuch, einen Bedeutungsbegriff nach dem Grundprinzip zu entwickeln, scheitern. Denn bei näherem Hinsehen zeigt sich:
— Erstens ist nicht jedes $[\varphi]$ in $[\theta]$ definierbar.
So gibt es beispielsweise in $[\theta_w]$ keine Definition für H, kein μ also, so daß $H \leftrightarrow \mu$ eine Definition ist.
— Zweitens gibt es Theorien $[\varphi]$ in $[\theta]$, die mehrfach, und zwar durchaus verschieden definierbar sind.
Beispielsweise sind $[W \wedge H]$, $[W \wedge H \wedge \neg S]$ und $[W \wedge \neg S]$ verschiedene Theorien, die jeweils $[R]$ in $[\theta_w]$ definieren.

Die Bedeutungsfunktion läßt sich so also nicht definieren.

2.6 Bedeuten als Verifizieren

Wir haben gesehen, wie das Prinzip der Definition ein Vorbild sein kann für einen Bedeutungsbegriff, der das Grundprinzip erfüllt. Eine Lösung, einen wohldefinierten Bedeutungsbegriff konnten wir daraus allerdings nicht gewinnen. Wir werden nun einen anderen, ebenfalls das Grundprinzip erfüllenden Ansatz vorstellen: die Verifikation. Damit versuchen wir, eine Idee zu formalisieren, die Peirce[3] umschrieben hat als:

Die Bedeutung einer Äußerung ist das Kriterium ihrer Verifikation.

Ähnlich äußert Wittgenstein im *Tractatus logico-philosophicus*, 4.024:

Einen Satz verstehen, heißt, wissen was der Fall ist, wenn er wahr ist.

In einer ersten Annäherung formulieren wir diesen Gedanken für unseren Bedeutungsbegriff im Rahmen der Aussagenlogik wie folgt:

Die Bedeutung $[\mu]$ einer Assertion $[\theta \mid \varphi]$ gibt einen Fall an, in dem $[\theta \mid \varphi]$ wahr ist.

Und wir wollen sagen
— $[\mu]$ VERIFIZIERT $[\theta \mid \varphi]$, oder
— $[\mu]$ VERIFIZIERT $[\varphi]$ IN $[\theta]$,

wenn $[\mu]$ einen Fall angibt, in dem $[\varphi]$ wahr in $[\theta]$ ist.

[3] Quine schreibt Peirce diesen Gedanken zu in *Two dogmas of empiricism*, 1951.

Ziehen wir wieder unsere Standardwelt heran:

— In welchem Fall ist es feucht?
  - — Erste Lösung: Im Fall daß es regnet.
  - — Zweite Lösung: Im Fall daß es schneit.
  - — Dritte Lösung: Im Fall daß es regnet oder schneit.
  - — Vierte Lösung: Im Fall daß es warm ist und regnet und nicht schneit.

  Daß heißt also, daß jede der vier Theorien $[R]$, $[S]$, $[R \vee S]$, $[H \wedge R \wedge \neg S]$ die Theorie $[W]$ in $[\theta_w]$ verifiziert.

  Es gibt also eine ganze Reihe von Möglichkeiten (sogar mehr als vier), um $[\theta_w \mid W]$ zu verifizieren, obwohl $[\theta_w \mid W]$ an sich ja falsch ist.

— Theorien, die die falsche Assertion $[\theta_w \mid R]$ verifizieren, sind beispielsweise: $[\neg S \wedge W]$, $[H \wedge W]$, $[H \wedge \neg S \wedge W]$.

— Theorien, die $[\theta_w \mid S \vee W]$ verifizieren, sind beispielsweise: $[R]$, $[H \wedge R]$.

Uns fehlt nun allerdings noch eine formale Fassung dieser Idee, daß die Bedeutung, das heißt die verifizierende Theorie, "einen Fall angibt, in dem die Assertion wahr ist." Wir wollen erreichen, daß $[\varphi]$ in $[\theta]$ wahr wird und dazu wollen wir einen Umstand $[\mu]$ angeben, in dem das der Fall ist. Das heißt, die Wahrheitsgrundlage für $[\varphi]$ ist nun nicht mehr nur die Theorie $[\theta]$ allein, sondern die Theorie $[\theta]$ *und* die Theorie $[\mu]$; das ist die Theorie $[\theta \wedge \mu]$.

Seien $[\theta \mid \varphi]$ und $[\theta \mid \mu]$ Assertionen. Dann sagen wir:[4]

  $[\mu]$ VERIFIZIERT $[\varphi]$ IN $[\theta]$, wenn $[\theta \wedge \mu \mid \varphi]$[5] wahr ist.

Tatsächlich ordnen sich auch die soeben angeführten Beispiele dieser fomalen Definition unter.

Anders als bei der Idee der Definition gilt für die Verifikation:

  Zu jeder Assertion $[\theta \mid \varphi]$ gibt es ein $[\mu]$, das $[\varphi]$ in $[\theta]$ verifiziert.

Ebenso wie bei der Idee der Definition gilt aber auch für die Verifikation:

  Zu jeder Assertion $[\theta \mid \varphi]$ gibt es im allgemeinen mehrere verschiedene Theorien, die $[\varphi]$ in $[\theta]$ verifizieren.

Doch dieses Problem können wir lösen, indem wir aus der Menge aller verifizierenden Theorien eine besonders ausgezeichnete herausgreifen. Beispielsweise eine, die wir die MAXIMALE nennen wollen, und die immer in eindeutiger Weise existiert.

Doch zunächst einmal wenden wir uns einem anderen Phänomen zu.

2.7 Das Oppositionsprinzip

Die Vorstellung unserer alternativen Semantik war ausgegangen vom sogenannten Grundprinzip. Daneben gibt es aber noch ein zweites, ebenso zentrales und von der etablierten Semantik radikal verschiedenes Prinzip, das die Suche nach dem neuen, alternativen Begriff geleitet hat. Wir wollen diese Idee das OPPO-

[4] Tatsächlich ist das noch nicht die endgültige Definition des Verifikationsbegriffs. Alle hier weiterhin gemachten Feststellungen sind aber auch dann noch gültig.

[5] Eine andere, äquivalente Formulierung wäre $[\theta \mid \mu \rightarrow \varphi]$ statt $[\theta \wedge \mu \mid \varphi]$.

SITIONSPRINZIP nennen.

Der Terminus OPPOSITION ist dem linguistischen Strukturalismus, insbesondere der strukturalistischen Phonologie entlehnt.[6] Auf diese Strömung geht die Anregung zurück, die Semantik eines Zeichens nicht in einem vermeintlichen Etwas zu suchen, worauf das Zeichen zeigt, sondern vielmehr in der Abgrenzung gegen all die anderen Zeichen des Zeichensystems, die von diesem gewählten Zeichen verschieden sind. Das heißt, Bedeuten wird nicht mehr als ein Akt der Identifikation, sondern als einer der Differenzierung vorgestellt.

Zur Veranschaulichung einer derart differentiellen Semantik stellen wir uns ein Zeichensystem vor, das nur aus den Zeichen “rot”, “gelb” und “blau” bestehe. Dann *bedeutet* in dieser einfachen Farbensprache der Ausdruck “dies ist rot” soviel wie “dies ist weder gelb noch blau”.

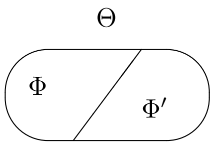
Wir wollen nun daran gehen, das Oppositionsprinzip im Rahmen unserer hier bisher entwickelten Logik zu formulieren.

Sei $[\theta \mid \varphi]$ eine gegebene Assertion und
— Θ die Menge der Bitvariablen in θ und
— Φ die Menge der Bitvariablen in φ

so daß also

$$[\theta \mid \varphi] = [\theta, \Theta \mid \varphi, \Phi].$$

Definitionsgemäß war vereinbart, daß Φ Untermenge von Θ sei, wie das folgende Bild veranschaulicht:



Wir wollen die Menge aller Bitvariablen aus Θ, die nicht in Φ vorkommen, mit Φ' bezeichnen.

Die Assertion $[\theta \mid \varphi]$ bezieht sich indirekt auf alle Bitvariablen aus Θ, direkt wird aber nur eine Aussage über die Bitvariablen aus Φ gemacht. Wenn nun etwa Bedeutung als Verifikation vorgestellt wird, $[\mu]$ also die Umstände angeben soll, unter denen $[\theta \mid \varphi]$ wahr wird, so läßt sich sinnvoll fordern, daß $[\mu]$ eingeschränkt sei auf die Bitvariablen aus Φ'. Denn alles, was die Bitvariablen aus Φ betrifft, ist durch $[\varphi]$ bereits festgeschrieben.

Wir formulieren das OPPOSITIONSPRINZIP für unseren Bedeutungsbegriff also wie folgt:

> Die Bedeutung einer Assertion $[\theta, \Theta \mid \varphi, \Phi]$ ist eine Theorie der Form $[\mu, \Phi']$, wobei Φ' die Menge aller Bitvariablen aus Θ ist, die in Φ nicht vorkommen.[7]

[6] In mathematischer Terminologie hätte das Oppositionsprinzip wohl eher KOMPLEMENTÄRPRINZIP geheißen.

[7] An dieser Stelle wird auch klar, warum wir Assertionen aus dem Theorie–Begriff her definierten und nicht etwa durch Propositionen. Das Oppositionsprinzip läßt sich in einer reinen Propositionenlogik gar nicht formulieren.

Sehen wir uns beispielsweise die Assertion

$[\theta_w \mid R]$

einmal näher an, wobei $[\theta_w]$ wiederum für unser Standard–Beispiel stehe. Die Menge der Bitvariablen in $[\theta_w]$ ist also wieder

$\Theta_w = \{H, R, S, W\}$,

die Menge der Bitvariablen in $[R]$ ist $\{R\}$ und somit ist

$[\theta_w \mid R] = [\theta_w, \{H, R, S, W\} \mid R, \{R\}]$.

Das Oppositionsprinzip fordert von einer potentiellen Bedeutung von $[\theta_w \mid R]$, daß diese die Form

$[\mu, \Phi']$

habe, wobei Φ' die Bitvariablen aus Θ_w sind, die nicht in $\{R\}$ vorkommen, also

$\Phi' = \{H, S, W\}$

und die Formel μ höchstens die Bitvariablen H, S und W enthalten darf.

Beispielsweise wäre

$[W \wedge H \wedge \neg S] = [W \wedge H \wedge \neg S, \{H, S, W\}]$

eine Theorie, die das Oppositionsprinzip erfüllt. Außerdem definiert und verifiziert sie die Assertion. Dies leistet zwar auch

$[W \wedge H] = [W \wedge H, \{H, W\}]$

wobei hier allerdings das Oppositionsprinzip verletzt ist. Doch wenn diese Theorie modifiziert wird zu

$[W \wedge H, \{H, S, W\}]$

so erfüllt sie das Oppositionsprinzip und definiert und verifiziert die Assertion außerdem.[8]

Tatsächlich sind wir einer speziellen Variante des Oppositionsprinzips schon bei der Definition begegnet, nämlich in der Forderung, eine Definition dürfe nicht zirkulär sein. Dort war ja gefordert, daß μ und φ keine gemeinsamen Bitvariablen enthalten dürfen, wenn μ φ in $[\theta]$ definieren soll.

Sowohl für einen Bedeutungsbegriff nach dem Vorbild einer Definition, als auch nach der Idee der Verifikation läßt sich das Oppositionsprinzip also durchaus plausibel postulieren.

2.8 Die wahre Bedeutungsfunktion

Wenn wir nun die bisherigen Ideen kombinieren, gelangen wir endlich zu einem vollständig bestimmten Bedeutungsbegriff.

Zunächst einmal modifizieren wir den Verifikationsbegriff, indem wir das Oppositionsprinzip direkt darin aufnehmen:

Eine Theorie $[\mu]$ VERIFIZIERT eine Assertion $[\theta \mid \varphi]$ genau dann, wenn

— $[\theta \wedge \mu \mid \varphi]$ wahr ist und

[8] In einer Theorie wie $[W \wedge H, \{H, S, W\}]$ heißen die Bitvariablen H und W VALENT, S hingegen heißt INVALENT. Invalente Bitvariable angeben zu müssen, nur damit das Oppositionsprinzip erfüllt wird, erscheint vielleicht auf den ersten Blick unnötig kompliziert. Wir wollen diesen Punkt aber hier nicht weiter diskutieren.

— $[\mu]$ genau die Bitvariablen aus $[\theta]$ enthält, die nicht in $[\varphi]$ vorkommen.

Nun läßt sich zeigen, daß zu jeder Assertion $[\theta \mid \varphi]$ genau eine Theorie $[\mu_{true}]$ existiert, die diese ABSOLUT MAXIMAL verifiziert, das heißt:

> Alle Einsbewertungen jeder anderen verifizierenden Theorie $[\mu]$ sind auch in $[\mu_{true}]$ enthalten. (Mit anderen Worten: $\mu \Rightarrow \mu_{true}$.)

Weil es zu jeder Assertion genau eine diese absolut maximal verifizierende Theorie gibt, können wir dies als die gesuchte Zuordnungsvorschrift einer Bedeutungsfunktion definieren, die wir dann die WAHRE BEDEUTUNGSFUNKTION nennen wollen, und zwar wegen einer bemerkenswerten Eigenschaft, der wir den anschließenden, letzten Abschnitt widmen wollen.[9]

Die WAHRE BEDEUTUNGSFUNKTION ordnet jeder Assertion $[\theta \mid \varphi]$ diejenige Theorie

$$truemean[\theta \mid \varphi] = [\mu_{true}]$$

zu, die die Assertion absolut maximal verifiziert. Wir sagen

— $[\mu_{true}]$ ist die WAHRE BEDEUTUNG VON $[\theta \mid \varphi]$ oder auch

— $[\mu_{true}]$ ist die WAHRE BEDEUTUNG VON $[\varphi]$ IN $[\theta]$.

Wie sich die wahre Bedeutung tatsächlich aus einer gegebenen Assertion berechnen läßt, soll an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden. Stattdessen wollen wir einige Beispiele geben, wobei wir uns in allen Fällen wieder auf unser Standardbeispiel $[\theta_w]$ beziehen:

— $[(R \wedge \neg W) \vee (\neg R \wedge W) \vee (\neg H \wedge R)]$ ist die wahre Bedeutung von $[S]$.

— $[R \vee S, \{H, R, S\}]$ ist die wahre Bedeutung von $[W]$, und umgekehrt

— $[W]$ ist die wahre Bedeutung von $[R \vee S, \{H, R, S\}]$.

— $[W, \{H, W\}]$ ist die wahre Bedeutung von $[R \vee S]$.

— $[H \wedge \neg H \wedge W \wedge \neg W] = [0, \{H, W\}]$ ist die wahre Bedeutung von $[R \wedge S]$.

— $[H \vee \neg H \vee W \vee \neg W] = [1, \{H, W\}]$ ist die wahre Bedeutung von $[\neg(R \wedge S)]$.

— $[H \vee \neg H] = [1, \{H\}]$ ist die wahre Bedeutung von $[R \vee S \vee \neg W]$.

— $[0]$ ist die wahre Bedeutung von $[H \wedge R \wedge S \wedge W]$.

Als wir oben den Ansatz machten, eine Bedeutungsfunktion durch den Definitionsbegriff zu gewinnen, mußten wir feststellen, daß dies nicht in der gewünschten Weise möglich war, da nicht jede Assertion eine diese definierende Theorie besaß. Die wahre Bedeutungsfunktion hat aber nun die folgende Eigenschaft; sie erfüllt das sogenannte DEFINITIONSPRINZIP:

> Wenn eine Assertion überhaupt eine sie definierende Theorie besitzt, dann ist ihre wahre Bedeutung eine solche.

[9] Es sei darauf hingewiesen, daß die wahre Bedeutungsfunktion nicht die einzig plausible Bedeutungsfunktion ist. So gibt es beispielsweise eine, die wir die ABSOLUT ERFÜLLENDE BEDEUTUNGSFUNKTION nennen, für die neben den bisher entwickelten Prinzipien (Opposition, Verifikation und Definition) auch das sogenannte PRINZIP DER ABSOLUTEN ERFÜLLBARKEIT gilt, und deren Ergebnisse, die ABSOLUT ERFÜLLENDEN BEDEUTUNGEN, sich häufig besser mit einem naiven Bedeutungsverständnis vertragen als die WAHREN BEDEUTUNGEN. Das Verhältnis dieser beiden Bedeutungsfunktionen ist analog dem Verhältnis der mathematischen und der naiven Auffassung der Subjunktion $\rightarrow$ interpretierbar. Der Nachteil der absolut erfüllenden gegenüber der wahren Bedeutungsfunktion liegt allerdings vor allem in dem Umstand, daß im ersten Fall das so mächtige PRINZIP DER AUFHEBUNG DES WAHRHEITS– IN DEN BEDEUTUNGSBEGRIFF (siehe unten) nicht mehr erfüllt ist.

Der Leser mag sich das selber an den soeben genannten Beispielen zu veranschaulichen versuchen, ob und wann $\theta_w \Rightarrow \varphi \leftrightarrow \mu_{true}$ zutrifft.

2.9 Die Aufhebung des Wahrheits– in den Bedeutungsbegriff

Im allgemeinen wird in traditionellen Semantiken der Wahrheits– auf den Bedeutungsbegriff aufgebaut: erst nachdem die Bedeutung einer Aussage ermittelt ist läßt sich entscheiden, ob sie wahr oder falsch ist.

Bei der Konstruktion unseres Bedeutungsbegriffs war diese epistemologische Reihenfolge genau umgekehrt: erst mußte der Begriff der Assertion und ihres Wahrheitswertes vorliegen um daraus ihre Bedeutung gewinnen zu können; die Bedeutungsfunktion benötigte die Wahrheitsfunktion (beziehungsweise den Folgerungsbegriff); Bedeutung unterstellte Wahrheit.

Um so bemerkenswerter ist nun, daß wiederum umgekehrt der Wahrheitsbegriff in unseren Begriff der wahren Bedeutung gewissermaßen *aufgehoben* ist, und zwar in der folgenden Weise, dem sogenannten PRINZIP DER AUFHEBUNG DES WAHRHEITS– IN DEN BEDEUTUNGSBEGRIFF:[10]

Sei

— $[\theta \mid \varphi]$ eine Assertion

— $\tau := truth[\theta \mid \varphi]$ ihr Wahrheitswert und

— $[\mu] := truemean[\theta \mid \varphi]$ ihre wahre Bedeutung.

So gilt:

> μ und 1 sind äquivalent genau dann, wenn τ gleich 1 ist.

Kurz gesagt:

> Die wahre Bedeutung einer Assertion ist eine tautologische Theorie genau dann, wenn die Assertion wahr ist.

Dieses Phänomen war der Anlaß für die Bezeichnung WAHRE BEDEUTUNG (SFUNKTION).

Das Prinzip der Aufhebung bestätigt sich anschaulich in den obigen genannten Beispielen

— $[1 \mid \{H, W\}]$ ist die wahre Bedeutung von $[\neg(R \wedge S)]$ in $[\theta_w]$, weil $[\neg(R \wedge S)]$ wahr ist in $[\theta_w]$.

— $[1 \mid \{H\}]$ ist die wahre Bedeutung von $[R \vee S \vee \neg W]$ in $[\theta_w]$, weil $[R \vee S \vee \neg W]$ wahr ist in $[\theta_w]$.

Die sechs anderen Beispiel-Assertionen sind nicht wahr und ihre wahre Bedeutung ist jeweils keine tautologische Theorie.

[10]Was mittlerweile allgemein in der Logik als der WAHRHEITSWERT EINER FORMEL (hier abgewandelt: EINER ASSERTION) genannt wird, hieß in Freges Semantik die BEDEUTUNG EINES SATZES. (Obwohl es in der Geschichte wohl kaum eine zweite derart durchkomponierte und konsequente Semantik gibt — so aus ihrem Zusammenhang gerissen klingt seine Bezeichnung unpassend und konnte sich wohl deshalb auch nicht durchsetzen.) Das Prinzip der Aufhebung hätte daher auch passend die AUFHEBUNG DES FREGESCHEN BEDEUTUNGSBEGRIFFS heißen können.

Literatur

— Gottlob Frege *Über Sinn und Bedeutung*
Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik, NF100, 1892, S.25-50
(unter anderem wieder abgedruckt in
G. Frege *Funktion, Begriff, Bedeutung*
Hg. G. Patzig, Göttingen, 1980^5, 1962^1.)